Das Ziegenproblem

Nils Schwinning und Christian Schöler
http://www.esaga.uni-due.de/

Juni 2010

Die Formulierung

Obwohl das sogenannte Ziegenproblem in der Mathematik allgegenwärtig erscheint, wurde es erst 1990 in seiner bekannten Form in einem Leserbrief von Craig F. Whitaker aus Columbia, Maryland an Marilyn vos Savant's -Kolumne im Parade Magazine formuliert.

Die Formulierung

Nehmen Sie an, Sie wären in einer Spielshow und hätten die Wahl zwischen drei Toren. Hinter einem der Tore ist ein Auto, hinter den anderen sind Ziegen. Sie wählen ein Tor, sagen wir, Tor Nummer 1, und der Showmaster, der weiß, was hinter den Toren ist, öffnet ein anderes Tor, sagen wir, Nummer 3, hinter dem eine Ziege steht. Er fragt Sie nun: 'Möchten Sie das Tor Nummer Zwei?' Ist es von Vorteil, die Wahl des Tores zu ändern?

Die Antwort

Durch die Antwort von Marilyn vos Savant auf den Leserbrief erzielte das Problem international auch außerhalb der Fachwelt hohe Aufmerksamkeit und führte zu heftigen Kontroversen. Ihre Antwort lautete:

“Ja, Sie sollten wechseln. Das zuerst gewählte Tor hat die Gewinnchance von $1/3$, aber das zweite Tor hat eine Gewinnchance von $2/3$. Hier ist ein guter Weg, sich das Geschehen vorzustellen. Nehmen Sie an, es gäbe 1 Million Tore und Sie wählen Tor Nummer 1. Dann öffnet der Moderator, der weiß, was hinter den Toren ist, und der das eine Tor mit dem Preis immer vermeidet, alle Tore bis auf Tor Nummer 777777. Sie würden doch sofort zu diesem Tor wechseln, oder nicht?”

Obwohl diese Argumentation schlüssig erscheint, bedarf der exakte, mathematische Beweis einiger Vorbereitungen. Wir müssen zum einen wissen, was bedingte Wahrscheinlichkeiten $\mathcal{P}(A \mid B)$ sind, also die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintritt unter der Bedingung, dass das Ereignis B bereits eingetreten ist. Außerdem sind der Satz der totalen Wahrscheinlichkeit und die daraus resultierende Formel von Bayes von zentraler Bedeutung.

Grundlegende Definitionen

Wie in vielen mathematischen Teildisziplin findet auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie die Mengenlehre Anwendung.
Der Begriff Menge geht auf Georg Cantor zurück, der eine Menge als eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen beschrieb. Die Objekte der Menge heißen Elemente der Menge.

Grundlegende Definitionen

Auch mit Mengen kann man in einem gewissen Sinne rechnen:

Definition

Seien A und B zwei Mengen, dann bezeichnet

- $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$ *die Vereinigung der beiden Mengen,*
- $A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$ *den Schnitt der beiden Mengen.*

Grundlegende Definitionen

Definition

Die leere Menge, also die Menge mit keinerlei Elementen, bezeichnen wir mit $\emptyset$*. Zwei Mengen* A *und* B *heißen disjunkt, wenn sie keine gemeinsamen Elemente haben, dass heißt für die beiden disjunkten Mengen* A *und* B*, gilt*

$$A \cap B = \emptyset.$$

Grundlegende Definitionen

Wir definieren zunächst einen endlichen Wahrscheinlichkeitsraum:

Definition

Ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum ist eine endliche Menge Ω *mit einer Funktion* $\mathcal{P} : \Omega \to [0,1]$ *so dass* $\sum_{\omega \in \Omega} \mathcal{P}(\omega) = 1$ *ist.*

Für eine Teilmenge $A \subset \Omega$ *ist dann* $P(A) := \sum_{\omega \in A} \mathcal{P}(\omega)$ *die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses* A*.*

Grundlegende Definitionen

$\mathcal{P}$ heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung (kurz: W–Verteilung, engl.: probability distribution) oder auch Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω (genauer: auf den Teilmengen von Ω). $\mathcal{P}(A)$ heißt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A.

Beispiel

Der Wahrscheinlichkeitsraum für den einfachen Münzwurf ist leicht zu konstruieren. Wir setzen $\Omega = \{0, 1\}$ *und* $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. *Dann gilt offensichtlich:*

$$\mathcal{P}(\emptyset) = 0,\ \mathcal{P}(\{0\}) = \frac{1}{2},\ \mathcal{P}(\{1\}) = \frac{1}{2},\ \mathcal{P}(\{0, 1\}) = 1.$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition

Es seien A und B zwei Ereignisse mit $\mathcal{P}(B) \neq 0$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit für A gegeben B, $\mathcal{P}(A \mid B)$, wird definiert als

$$\mathcal{P}(A \mid B) := \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}.$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Satz

Es sei $(\Omega, \mathcal{P})$ *ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum,* B *ein Ereignis mit* $0 < \mathcal{P}(B) < 1$ *und* $\overline{B}$ *das Ereignis "nicht* B*" - also das Gegenereignis zu* B*. Dann gilt für jedes Ereignis* A*:*

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A \mid B) \cdot \mathcal{P}(B) + \mathcal{P}(A \mid \overline{B}) \cdot \mathcal{P}(\overline{B}).$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Beweis

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{P}(A \mid B) \cdot \mathcal{P}(B) + \mathcal{P}(A \mid \overline{B}) \cdot \mathcal{P}(\overline{B}) \\
= \quad & \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)} \cdot \mathcal{P}(B) + \frac{\mathcal{P}(A \cap \overline{B})}{\mathcal{P}(\overline{B})} \cdot \mathcal{P}(\overline{B}) \\
= \quad & \mathcal{P}(A \cap B) + \mathcal{P}(A \cap \overline{B}) \\
= \quad & \mathcal{P}(A).
\end{aligned}
$$

Formel von Bayes

Das wesentliche Werkzeug, um das Ziegenproblem zu lösen, ist die Formel von Bayes. Nun haben wir alle Mittel zur Verfügung, diesen Formel herzuleiten und zu beweisen.

Satz von Bayes

Es sei $(\Omega, \mathcal{P})$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, A ein Ereignis mit $\mathcal{P}(A) > 0$, B ein Ereignis mit $0 < \mathcal{P}(B) < 1$ und $\overline{B}$ das Gegenereignis zu B. Dann gilt:

$$\mathcal{P}(B \mid A) = \frac{\mathcal{P}(A \mid B) \cdot \mathcal{P}(B)}{\mathcal{P}(A \mid B)\mathcal{P}(B) + \mathcal{P}(A \mid \overline{B}) \cdot \mathcal{P}(\overline{B})}$$

Formel von Bayes

Beweis

Der Beweis ergibt sich durch zweifache Anwendung des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit.

Die mathematische Lösung des Ziegenproblems

Voraussetzungen

Sei E das unbeobachtete Ereignis ("Hinter welchem Tor steht das Auto?") und B das beobachtete Ereignis ("Welche Tür lässt der Quizmaster geschlossen?"). Das führt zu den folgenden Werten, die wir für die Formel von Bayes brauchen:

Die mathematische Lösung des Ziegenproblems

Voraussetzungen

- $\mathcal{P}(E) =$ Wahrscheinlichkeit, dass hinter einer Tür ein Auto steht $= \frac{1}{3}$.
- $\mathcal{P}(B) =$ Wahrscheinlichkeit, dass eine Tür nach der Wahl des Quizmasters verschlossen bleibt $= \frac{1}{2}$.
- $\mathcal{P}(B \mid E) =$ Wahrscheinlichkeit, mit der der Quizmaster eine Tür geschlossen lässt, wenn hinter ihr ein Auto steht $= 1$ (da der Quizmaster nur eine Tür öffnet, wenn hinter ihr kein Auto steht).
- $\mathcal{P}(E \mid B) =$ Wahrscheinlichkeit, mit der hinter der vom Quizmaster geschlossen gelassenen Tür ein Auto ist; dies ist der Wert, den wir suchen.

Die mathematische Lösung des Ziegenproblems

Rechnung

Eingesetzt in die Formel von Bayes ergibt sich:

$$\mathcal{P}(E \mid B) = \frac{\mathcal{P}(B \mid E)\mathcal{P}(E)}{\mathcal{P}(B)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Die mathematische Lösung des Ziegenproblems

Interpretation

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto hinter der Tür steht, die der Quizmaster geschlossen lässt, beträgt somit $\frac{2}{3}$, wogegen sie hinter der ursprünglichen Tür nur $\frac{1}{3}$ beträgt. Somit ist klar, dass man seine Chancen auf das Auto verdoppelt, wenn man wechselt. Vos Savant hatte also Recht.

Ausblick

Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist eine Pflichtveranstaltung im Mathematikstudium sowohl im Bachelor als auch im Lehramtsstudium. Auch die hier diskutierten Sätze der totalen Wahrscheinlichkeit und die Formel von Bayes sind Gegenstand der Vorlesung. Allerdings beschränkt man sich dann nicht mehr auf endlich-dimensionale Wahrscheinlichkeitsräume.